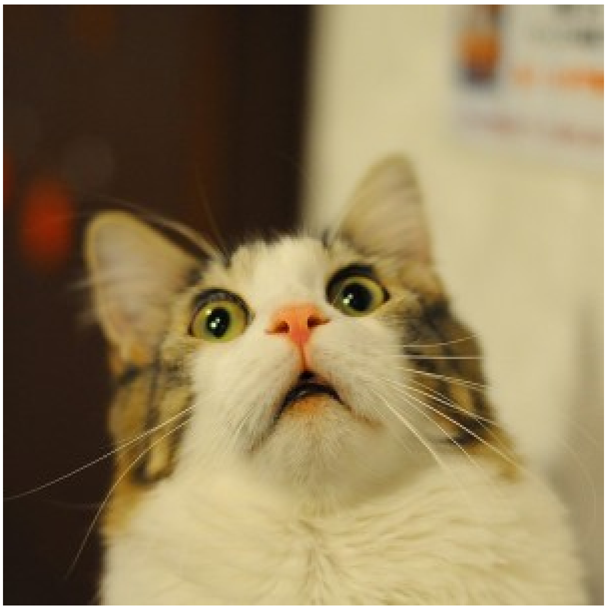
1.14. Материальные уравнения для движущихся диэлектриков.

Ща будет шокирующая инфа. Если среда у нас покоится, то в ней, как правило, D=εE, B=μH.

А если среда поедет, то это будет неверно!



Вы только посмотрите, какие противные формулы станут, когда среды поедут:

$$\vec{D}_\perp = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\vec{E}_\perp\left(1-\frac{\beta^2}{n^2}\right)+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{[\vec{V},\vec{B}_\perp]}{c}\right\},$$

$$\vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu\left(1-\beta^2\right)}\left\{\vec{B}_\perp\left(1-n^2\beta^2\right)+\left(1-n^2\right)\frac{[\vec{V},\vec{E}_\perp]}{c}\right\}.$$

Какая уж там прямая пропорциональность! Тут D начинает зависеть не только от E, но и от B, и H также зависит от обоих величин – E и B. Соколов так и пишет:

<u>Замечание</u>: $\vec{D}=\vec{D}(\vec{E},\vec{B}),\ \ \vec{H}=\vec{H}(\vec{B},\vec{E}).$

Как же получить такой противный результат? Разумеется, из преобразований Лоренца:

$$\vec{E}'_\perp = \frac{\vec{E}_\perp+\frac{1}{c}[\vec{V},\vec{B}_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \vec{B}'_\perp = \frac{\vec{B}_\perp-\frac{1}{c}[\vec{V},\vec{E}_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

$$\vec{D}'_\perp = \frac{\vec{D}_\perp+\frac{1}{c}[\vec{V},\vec{H}_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \vec{H}'_\perp = \frac{\vec{H}_\perp-\frac{1}{c}[\vec{V},\vec{D}_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Штрихованная СК является неподвижной, и там верно

$$\vec{D}'_\perp = \varepsilon \vec{E}'_\perp, \ \vec{B}'_\perp = \mu \vec{H}'_\perp .$$

Выполним подстановку и учтем, что $\sqrt{1-\beta^2} \neq 0$. Получим:

$$\begin{cases} \vec{D}_\perp + \dfrac{1}{c}[\vec{V}, \vec{H}_\perp] = \varepsilon\left(\vec{E}_\perp + \dfrac{1}{c}[\vec{V}, \vec{B}_\perp]\right), \\ \vec{B}_\perp - \dfrac{1}{c}[\vec{V}, \vec{E}_\perp] = \mu\left(\vec{H}_\perp - \dfrac{1}{c}[\vec{V}, \vec{D}_\perp]\right). \end{cases}$$

В каждом уравнении участвуют все 4 буквы: E, D, B и H. Далее нужно «распутать» клубок, выразив D и H через E и B, которые мы считаем независимыми. Если это и сделать, то и получим результат.

1.15. Материальные уравнения для движущихся проводников.

Там ситуация другая. В СК проводника он неподвижен: ρ=0, а **j**=σ**E**. Оказывается, если мы рассмотрим движущуюся СК, то эти азбучные истины перестанут быть таковыми:

$$\rho = \frac{\sigma(\vec{V}, \vec{E})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}, \ \vec{j} = j_\parallel + j_\perp = \frac{\sigma\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{B}]\right\}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Внезапно появилась объёмная плотность зарядов (в проводнике!), и **j** перестало быть прямо пропорционально **E** ☺

Когда вы будете ехать в метро в следующий раз

подумайте о том, что в металлических проводах, спрятанных в кабелях, есть плотность зарядов ☺, потому что это движущийся проводник (для вас).

Доказывается аналогично – преобразования Лоренца

$$\rho = \frac{\rho' + \frac{(\vec{V},\vec{j}'_{\parallel})}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad j_{\parallel} = \frac{\vec{j}'_{\parallel} + \rho'\vec{V}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{j}_{\perp} = \vec{j}\,'_{\perp}.$$

Штрихованная СК неподвижна, и в ней $\vec{j}\,' = \sigma\vec{E}'$, $\rho' = 0$. Тогда

$$\rho = \frac{\sigma(\vec{V},\vec{E}'_{\parallel})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}, \quad j_{\parallel} = \frac{\sigma\vec{E}'_{\parallel}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{j}_{\perp} = \sigma\vec{E}\,'_{\perp}$$

Для полного перехода в нештрихованную (движущуюся) СК нужно избавиться от штрихованных Ешек:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{B}]}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Выполнив подстановки, и получим требуемый результат.

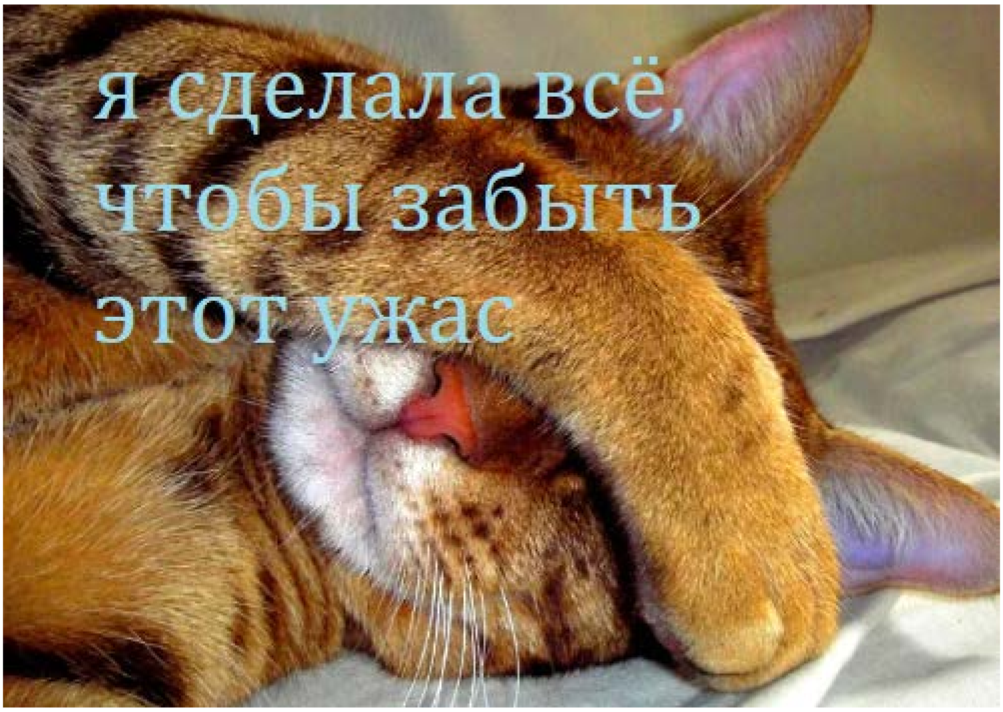
Замечание: Как правило, движение нерелятивистское, поэтому $\beta^2 = \frac{V^2}{c^2} \ll 1$, $\sqrt{1-\beta^2} \simeq 1$.

Тогда материальные уравнения движения проводника примут вид:

$$\rho \simeq 0, \quad \vec{j} \simeq \sigma\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{B}]\right\}.$$

1.16. Основные уравнения магнитной гидродинамики идеально проводящей жидкости.

Помните, как вы возюкались с жидкостью на теормехе?



Теперь будете ещё на электроде.

Итак, мы взяли идеально проводящую жидкость (σ->0) в магнитном поле.

Состояние идеальной жидкости можно задать, определив $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$, $p = p(\vec{r}, t)$, $\tau = \tau(\vec{r}, t)$.

Т.е. скорость, давление и плотность в каждой точке в каждый момент времени.

Давайте сразу посмотрим на результат.

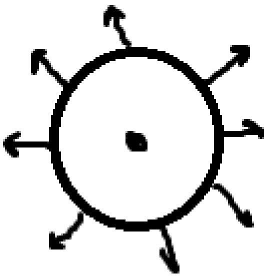
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau}{\partial t} + \operatorname{div}(\tau \vec{v}) = 0, \\ \tau \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p - \dfrac{1}{4\pi}[\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{H}], \\ \operatorname{rot}[\vec{v}, \vec{B}] = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \\ p = p(\tau). \end{cases}$$

6 уравнений – векторных и скалярных. Обсудим их:

Первое: $$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \operatorname{div}(\tau \vec{v}) = 0,$$ - уравнение неразрывности. Т.к. τ есть плотность массы, то оно означает ***изменение объёмной плотности в данной точке равно дивергенции потока жидкост ив данной точке.*** Напомню, что дивергенция есть поток вектора через малую площадь, делить на объём внутри этой площади. Возможно, вам будет понятней уравнение неразрывности в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\iiint \tau dV = -\oiint (t\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}dS$$

Изменение массы в элементарном объёме равно –поток скорости через площадь. Например, если скорость направлена вот так вот



то поток через площадь положителен, но за счёт минуса в уравнении неразрывности масса жидкости внутри будет уменьшаться (логично).

Пятое и шестое уравнения

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H}),$$
$$p = p(\tau).$$

есть свойства среды: зависимость **B** от **H** (прямо пропорциональная, с коэфом μ, или более мудрёная), и зависимость давления от плотности.

Четвёртое уравнение:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

есть просто уравнение Максвелла.

Третье уравнение

$$\operatorname{rot}[\vec{v}, \vec{B}] = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

также есть уравнение Максвелла, правда, слегка модернизированное. В оригинале было так:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

Но мы записали

$$\vec{j} = \sigma\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{B}]\right\}$$

И т.к. σ бесконечно велико, а j конечно, то выражение в фигурных скобках должно быть 0. Отсюда $\vec{E} = -\frac{1}{c}[\vec{v},\vec{B}]$, а подставив E в уравнение Максвелла $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$ и получим $\operatorname{rot}[\vec{v},\vec{B}] = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$.

Второе уравнение

$$\tau\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}p - \frac{1}{4\pi}[\vec{B},\operatorname{rot}\vec{H}],$$

есть второй закон Ньютона. В левой части стоит τa. Если мы домножим на dV, то получим τadV=adm – ну почти ma.

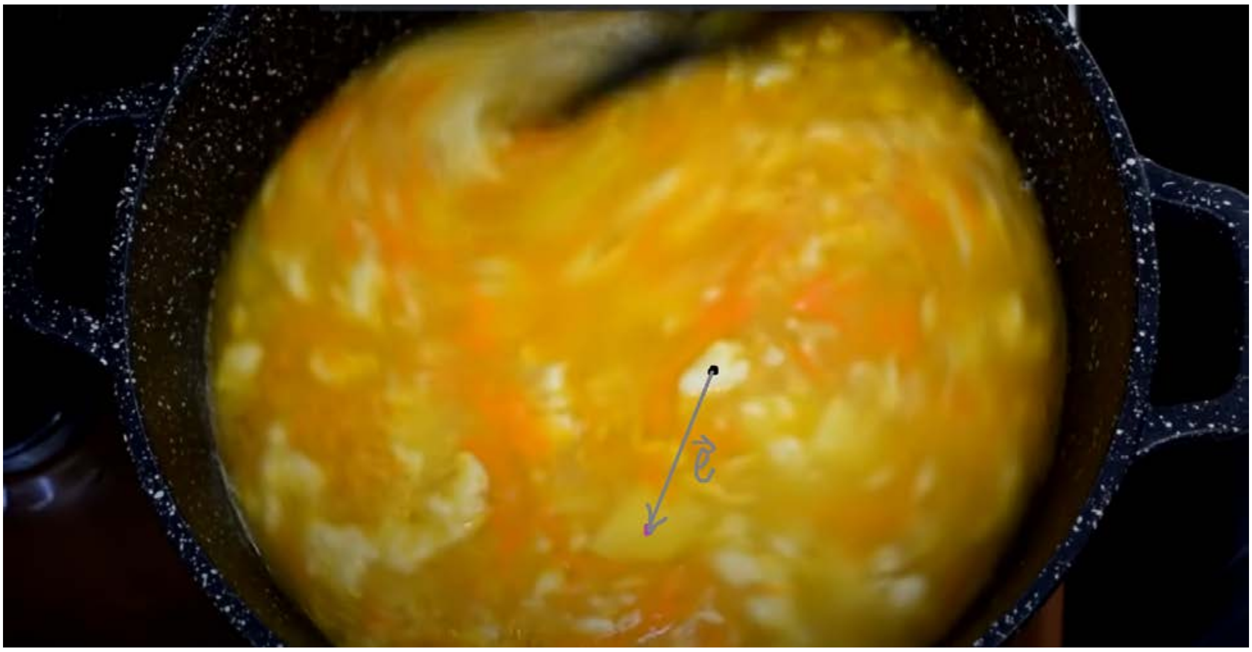
А справа стоят две объёмные плотности силы. –grad p есть механическая объёмной плотность силы, толкающая в сторону наибольшего убывания давления. А $-\frac{1}{4\pi}[\vec{B},\operatorname{rot}\vec{H}]$ есть электромагнитная сила. Почему именно такая?

Изначально $\vec{f} = \rho\vec{E} - \frac{1}{c}[\vec{j},\vec{B}]$, т.к. объёмной плотности зарядов нет, то просто $\vec{f} = -\frac{1}{c}[\vec{j},\vec{B}]$. Из уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{H}$, подставляем **j**, получаем результат.

Всё, все уравнения получены.

1.17. «Вмораживание» м/п в движущийся идеальный проводник.

Рассмотрим две частички в жидкости.



Например, в качестве одной точки возьмём середину белой капусты, а в качестве другой середину жёлтой картошки.

Запустим время:

Как мы видим, обе точки сместились к низу кастрюли, и вектор **l**, их разделяющий, изменился тоже.

Оказывается, он подчиняется закону

$$\frac{d\vec{l}}{dt} \simeq (\vec{l}, \vec{\nabla})\vec{v}.$$

И такому же уравнению подчиняется магнитное поле, делённое на плотность

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{B}}{\tau}\right) = \left(\frac{\vec{B}}{\tau}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

И вектор

$$\frac{d\vec{l}}{dt} \simeq (\vec{l}, \vec{\nabla})\vec{v}.$$

Это означает, что если изначально капуста и картошка находились на одной линии магнитной индукции:

то они будут находиться на ней в любой момент времени! Это можно себе представить в виде игрушечной железной дороге:

Частички летят вдоль линии магнитного поля. Расстояние между ними **l** может сокращаться, может расти, но с рельсов магнитного поля они сойти не могут ☺